A. Előállítás faktoriálisok segítségével. (-1)-ból közvetlenül adódik

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{ahol } n \text{ egész} \geq \text{k egész} \geq 0. \tag{1}$$

Ez lehetővé tszi, hogy faktoriálisok bizonyos kifejezéseit binomiális együtthatónak tekintsük és viszont.

B. Szimmetriatulajdonság. (-1)-ból és (1)-ből kapjuk:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ahol } n \text{ egész} \geq 0,\ k \text{ egész.} \tag{2}$$

Ez a formula minden egész k-ra érvényes. Ha k negatív vagy nagyobb n-nél, a binomiális együtthatók nullák (feltéve, hogy n nemnegatív egész).

C. A zárójel átlépése. A (-1) definícióból következik:

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}, \quad k \text{ egész} \neq 0. \tag{3}$$

Ez a formula jól használható arra, hogy a binomiális együtthatókat a velük előforduló más mennyiségekkel összedolgozzuk. Elemi átalakításokkal kapjuk belőle az alábbi összefüggéseket:

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}, \quad \frac{1}{r}\binom{r}{k} = \frac{1}{k}\binom{r-1}{k-1},$$

amelyek közül az első minden egész k-ra érvényes, a második pedig akkor, amikor a nevezőkben nincs nulla. Van még egy hasonló azonosság:

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{r-k}\binom{r-1}{k}, \quad k \text{ egész} \neq r \tag{4}$$

Szemléltessük ezeket az átalakításokat úgy, hogy (4)-et bebizonyítjük (2) és (3) majd ismét (2) alkalmazásával:

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k} = \frac{r}{r-k}\binom{r-1}{r-1-k} = \frac{r}{r-k}\binom{r-1}{k}.$$

(*Megjegyzés.* A levezetés csak akkor helyes, ha r pozitív egész és $\neq k$, a (2)-ben és (3)-ban szereplő megkötések miatt. (4) azonban *minden* $r \neq k$-ra igaz. Ez egy egyszerű, de fontos gondolatmenettel látható be. Tudjuk, hogy *végtelen sok* r értékre

$$r\binom{r-1}{k} = (r-k)\binom{r}{k}.$$

Az egyenlőség mindjét oldala r *polinomja.* Egy n-edfokú nem azonosan nulla polinomnak legfeljebb n különböző gyöke van; így (mint azt egy kivonás bizonyítja), *ha két legfeljebb n-edfokú polinom $n+1$ vagy több különböző pontban megegyezik, akkor a két polinom azonosan egyenlő.* Ez az elv sok azonosság egészekről valósakra való kiterjesztését teszi lehetővé)

D. Addíciós képlet. Az 1. táblázatban láthatóan teljesül az

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}, \quad k \text{ egész} \tag{5}$$

alapösszefüggés (azaz minden szám a felette és a felette balra álló számok összege). Ezt (-1)-ből könnyen be is lehet bizonyítani. Lássunk egy másik bizonyítást is (3) és (4) segítségével:

$$r\binom{r-1}{k} + r\binom{r-1}{k-1} = (r-k)\binom{r}{k} + k\binom{r}{k} = r\binom{r}{k}.$$

(5) gyakran használható egész r-ek esetén r szerinti teljes indukcióra.

E. Szummációs képlet. (5) ismételt alkalmazásával két fontos összegzéshez jutunk:

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{r+k}{k}=\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\cdots+\binom{r+n}{n}=\binom{r+n+1}{n},\quad n \text{ egész } \ge 0. \tag{6}$$

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{k}{m}=\binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1},\quad m \text{ egész } \ge 0,\ n \text{ egész } \ge 0. \tag{7}$$

n szerinti teljes indukcióval (7) könnyen bebizonyítható. Érdekes azonban megnézni, hogyan vezethető le (6)-ból (2) kétszeri alkalmazásával:

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{k}{m}=\sum_{-m\le k\le n-m}\binom{m+k}{m}=\sum_{-m\le k<0}\binom{m+k}{m}+\sum_{0\le k\le n-m}\binom{m+k}{k}=0+\binom{m+(n-m)+1}{n-m}=\binom{n+1}{m+1},$$

feltéve közben, hogy $n \ge m$. Az ellenkező esetben (7) triviális.
(7) nagyon gyakran alkalmazható, tulajdonképpen speciális eseteit már bizonyítottuk. Pl. ha $m=1$,

$$\binom{0}{1}+\binom{1}{1}+\cdots+\binom{n}{1}=0+1+\cdots+n=\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2},$$

előállt régi barátunk, a számtani sor összeképlete.