### 1.5 Vandermonde-determináns

Gyakran előfordulnak az alábbi speciális típusú determinánsok:

**1.5.1 Definíció**
Legyen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tetszőleges. A $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ elemek által generált *Vandermonde-determináns*

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \ldots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \ldots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \ldots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \ldots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

A Vandermonde-determináns $i$-edik sorában tehát rendre $\gamma_i$-nek $0, 1, \ldots, n-1$-edik hatványa áll. Ha két generáló elem azonos, akkor két egyforma sor van, és így a determináns 0. Az alábbi sorozatalakból kiderül, hogy ennek a megfordítása is igaz.

**1.5.2 Tétel**

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \ldots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \ldots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \ldots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \ldots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (\gamma_i - \gamma_j)$$

*Bizonyítás*: Vonjuk ki jobbról bal felé haladva minden oszlopból az őt megelőző oszlop $\gamma_1$-szeresét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \gamma_2 - \gamma_1 & \gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_2 & \ldots & \gamma_2^{n-1} - \gamma_1\gamma_2^{n-2} \\ 1 & \gamma_3 - \gamma_1 & \gamma_3^2 - \gamma_1\gamma_3 & \ldots & \gamma_3^{n-1} - \gamma_1\gamma_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \gamma_n - \gamma_1 & \gamma_n^2 - \gamma_1\gamma_n & \ldots & \gamma_n^{n-1} - \gamma_1\gamma_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Most vonjuk le minden sorból az első sort, ezzel az első oszlop utolsó $n-1$ eleme is 0 lesz, a többi elem pedig nem változott. A második, harmadik stb. sorból rendre $\gamma_2 - \gamma_1$-et, $\gamma_3 - \gamma_1$-et stb. kiemelhetünk. Ezzel a

$$(\gamma_2 - \gamma_1) \ldots (\gamma_n - \gamma_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_2^{n-2} \\ 0 & 1 & \gamma_3 & \ldots & \gamma_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \gamma_n & \ldots & \gamma_n^{n-2} \end{vmatrix} = (\gamma_2 - \gamma_1) \ldots (\gamma_n - \gamma_1) V(\gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

alakra jutottunk. Így a feladatot egy eggyel kisebb rendű Vandermonde-determinánsra vezettük vissza. A fenti eljárást megismételve (vagy teljes indukcióval) adódik a tétel. ■